Fonctions trigonométriques. Fonctions trigonométriques réciproques.

Dans ce chapitre, après un rappel sur la notion d'angle orienté, nous présentons les fonctions trigonométriques usuelles (cosinus, sinus, tangente) que le lecteur a sans doute déjà rencontrées ,puis les fonctions trigonométriques réciproques (Arccosinus, Arcsinus, Arctangente).

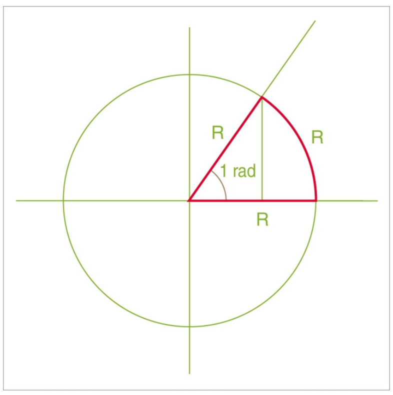
1 Trigonométrie : généralités.

1.1 Le radian

Nous connaissons déjà deux unités de mesures des angles, le degré et le grade.
Le degré est utilisé depuis l'antiquité, il est lié au partage du cercle en six parties de 60° (60 est la base numérique des Babyloniens). Le grade est utilisé par les géomètres, il est lié au système métrique et fut introduit à la révolution française.
Nous allons introduire une nouvelle unité qui permet d'associer naturellement longueur et angle. Elle est utilisé par les scientifiques depuis le début du XX^ième^ siècle.
On considère un cercle de centre O et de rayon R. La longueur de ce cercle est : $2\pi R$.

Définition

L'angle au centre interceptant un arc de longueur égale au rayon est un angle de 1 radian noté 1 rad.
On obtient immédiatement la correspondance suivante $\pi \, rad = 180°$.



D'une manière plus générale : si a est la mesure en radians et b la mesure en degrés d'un même angle, on peut utiliser le tableau de proportionnalité suivant :

radians	Degrés
π	180
a	b

La relation : $\frac{a}{\pi} = \frac{b}{180}$ permet un conversion simple.

Degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180
radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Il faut s'entraîner à placer les angles mesurés en radians sur le cercle.

1.2 Orientation

1.2.1 Cercle trigonométrique, orientation.

Considérons un cercle, il y a deux manières de le parcourir :

- dans le sens des aiguilles d'une montre,
- dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On convient d'appeler *sens positif* ou *direct* le sens inverse des aiguilles d'une montre. On dit alors que le cercle est orienté positivement.

Vous remarquerez que le sens direct est également le sens giratoire en France.

Définition

Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 dont l'orientation est positive. On parlera alors de sens positif ou *trigonométrique*.

Sur le cercle trigonométrique, la mesure en radians d'un angle est égale à la mesure en unités de longueur de l'arc qu'il intercepte.

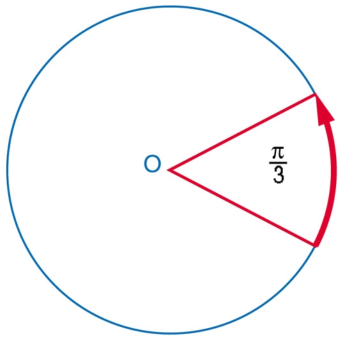
1.2.2 *Arc orienté*

Définition

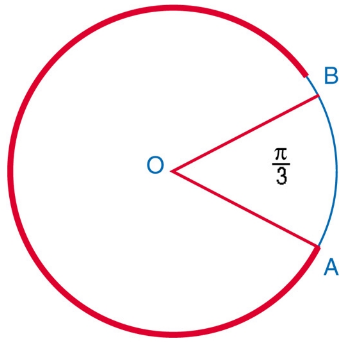
L'arc $\overset{\frown}{AB}$ est orienté si et seulement lorsque l'on décide de parcourir cet arc, on impose « d'aller » de A vers B.

A est l'origine de l'arc et *B* son extrémité.

Comment mesurer un arc orienté ?



le chemin de *A* vers *B* est parcouru dans le sens direct : une mesure de l'arc orienté $\widehat{AB}$ est a : ici $\frac{\pi}{3}$.



le chemin de *A* vers *B* est parcouru dans le sens indirect : une mesure de l'arc orienté $\widehat{AB}$ est $-a$: ici $-\frac{\pi}{3}$.

Définition

Une mesure de l'arc orienté $\widehat{AB}$ est :

- L'angle géométrique $\widehat{AOB}$ si le parcours de A vers B se fait dans le sens direct.
- Son opposé si le parcours de A vers B se fait dans le sens indirect.

Considérons, sur le cercle trigonométrique, un arc d'origine *A* et d'extrémité *B* dont la mesure est α ; l'angle au centre $\widehat{AOB}$ qui l'intercepte a donc pour mesure α (en radians).

Il y a différentes manières de relier les points *A* et *B*, en effectuant éventuellement une ou plusieurs fois le tour du cercle. On obtient alors des mesures différentes de cet arc orienté $\widehat{AB}$.

- α, $\alpha+2\pi$, $\alpha+4\pi$, … si on le parcourt dans le sens direct.
- α, $\alpha-2\pi$, $\alpha-4\pi$, … si on le parcourt dans le sens indirect.

Une mesure de l'arc orienté $\widehat{AB}$ est donc de la forme : $\alpha+2k\pi,\ k\in Z$.

Parmi toutes ces mesures, une et une seule appartient à l'intervalle $\left]-\pi,\pi\right]$: elle est appelée *mesure principale* de l'arc orienté $\widehat{AB}$.

Exemple

- On recherche la mesure principale de l'arc dont une mesure en radians est $\frac{29\pi}{3}$.

  On retire 2π autant de fois qu'il est nécessaire, afin de « tomber » dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, soit 5 fois. La mesure principale de l'arc est donc $\frac{29\pi}{3} - 5 \times 2\pi = -\frac{\pi}{3}$

  Pour trouver 5, on effectue la division de 29 par (2 fois le dénominateur) soit 6 et on arrondit à l'entier le plus proche.

- On peut utiliser la même règle pour les mesures négatives.

  La mesure principale de l'arc dont une mesure en radians est $-\frac{27\pi}{4}$ est donc $-\frac{27\pi}{4} + 3 \times 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$

<u>1.2.3 Mesure de l'angle orienté de deux vecteurs unitaires.</u>

Définition

On appelle vecteur unitaire tout vecteur de longueur 1.

Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, où M décrit le cercle trigonométrique de centre O, sont des vecteurs unitaires.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires, et A et B les points du cercle trigonométrique tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$. Alors

- L'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ correspondant à l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$ sur le cercle trigonométrique.
- les mesures de l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $(\vec{u}, \vec{v})$ sont aussi les mesures de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$.
- La mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure principale de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$.

Exemple

Soient deux points du cercle trigonométrique M et N tels que OMN soit équilatéral. M étant placé, il y a deux façons de placer le point N.

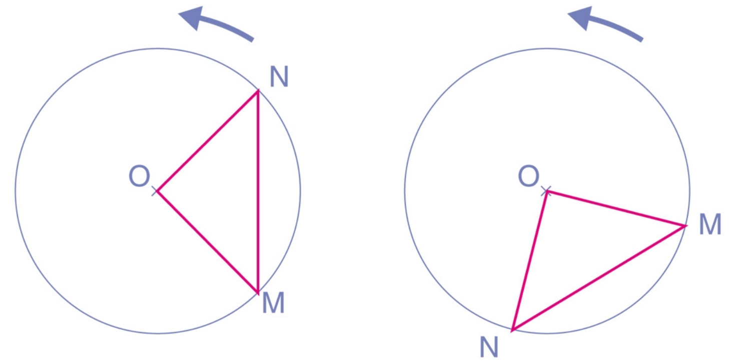


fig. 1 fig. 2

Pour des commodités d'écriture, on confondra les notations de l'angle et de sa mesure.

Dans le cas de la figure 1, on a : $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)=\frac{\pi}{3}$

Dans le cas de la figure 2, on a : $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)=-\frac{\pi}{3}$

Remarque

Le symbole = utilisé ici n'est pas adapté et abusif. En effet, on a également d'après ce qui précède $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)=\frac{\pi}{3}+2\pi$ et pourtant $\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{3}+2\pi$

L'écriture mathématique correcte est la suivante : $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)\equiv\frac{\pi}{3}\ \left[2\pi\right]$. On dira que $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)$ est congrue à $\frac{\pi}{3}$ modulo 2π.

D'une manière générale $a\equiv b\left[c\right] \Leftrightarrow a-b=kc$ où $c\in Z$.

Cette notation étant relativement lourde à manier, on adoptera l'abus de langage

$\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right)=\frac{\pi}{3}$

1.2.4 Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique.

Soit (C) le cercle trigonométrique de centre O. On choisit le point I comme origine sur (C) (voir figure).

Soit x un nombre réel quelconque. Il existe un unique point M de (C) tel que x soit une mesure de $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$. Ce point est appelé le point de (C) associé à x.

Inversement, soit M un point quelconque de (C). M est associé à n'importe quelle mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$, c'est-à-dire à tous les réels de la forme

$x+2k\pi\ (k\in Z)$.

1.3 Lignes trigonométriques, cosinus, sinus et tangente.

1.3.1 Définitions de sinus et cosinus

Soit M le point du cercle trigonométrique associé au réel x (x est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$).

Définition

On appelle *cosinus de x* et *sinus de x* les coordonnées du point M dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ défini par $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ (voir figure). On les note $\cos x$ et $\sin x$. Ainsi, le point M a pour coordonnées $(\cos x,\sin x)$.

Donc si P est la projection de M sur $\left(O,\vec{i}\right)$ parallèlement à $\left(O,\vec{j}\right)$, on a : $\overline{OP} = \cos x$, de même, si Q est la projection de M sur $\left(O,\vec{j}\right)$ parallèlement à $\left(O,\vec{i}\right)$, on a $\overline{OQ} = \sin x$

1.3.2 Propriétés de cosinus et sinus.

De la définition de $\cos x$ et $\sin x$, on tire immédiatement les propriétés suivantes :

- Pour tout réel x et tout entier relatif k,

$$\cos(x+2k\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x+2k\pi) = \sin x$$

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

En utilisant Pythagore dans le triangle OPM, on démontre :

- Pour tout réel x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

En considérant les symétries par rapport aux axes $\left(O,\vec{i}\right)$, $\left(O,\vec{j}\right)$ et $D : y = x$

- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$.
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Enfin, on admettra ces formules très utiles :

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

On en déduit :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$ *et* $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$

Exercice **(MATH05E01A)**

1) Sachant que $0 < t < \frac{\pi}{2}$ et que $\sin t = \frac{1}{4}$, **calculer** $\cos t$.

2) Sachant que $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ et que $\cos t = -\frac{1}{5}$, **calculer** $\sin t$.

3) On donne $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, **calculer** $\cos\frac{\pi}{12}$.

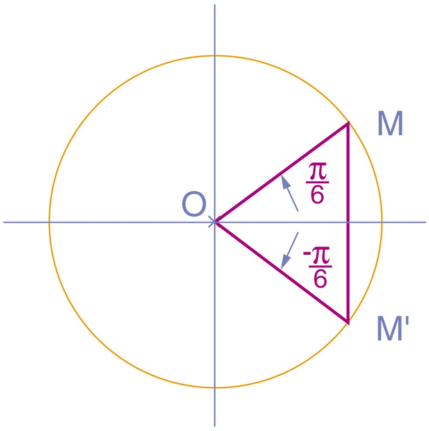
1.3.3 Valeurs remarquables.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Démonstration

On démontre par exemple $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Soit M le point du cercle trigonométrique tel que, $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\pi}{6}$ en radians. Soit M', le symétrique de M par rapport à $(O,\vec{i})$.



Le triangle OMM' est équilatéral, car l'angle au centre vaut 60° et les deux cotés $[OM]$ *et* $[OM']$ étant des rayons ont pour longueur 1. Soit P le milieu du segment

$[MM']$, on a $PM = PM' = \frac{1}{2}$. Dans le triangle rectangle OMP, on applique Pythagore. $OM^2 = MP^2 + OP^2 \Leftrightarrow OP^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow OP = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Or $cos\frac{\pi}{6} > 0$, donc $cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Pour les valeurs d'angles compris entre $\frac{\pi}{2}$ et 2π, il suffit d'utiliser les propriétés des fonctions cosinus et sinus pour retrouver les valeurs correspondantes.

Exemple

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 Etude des fonctions circulaire sinus, cosinus et tangente.

2.1 Fonctions périodiques.

Définition

Soit *f* une fonction définie sur D_f et *T* un réel non nul. On dit que *f* est périodique et que T est période, lorsque, pour tout réel *x*, $x + T \in D_f \quad et \quad f(x+T) = f(x)$

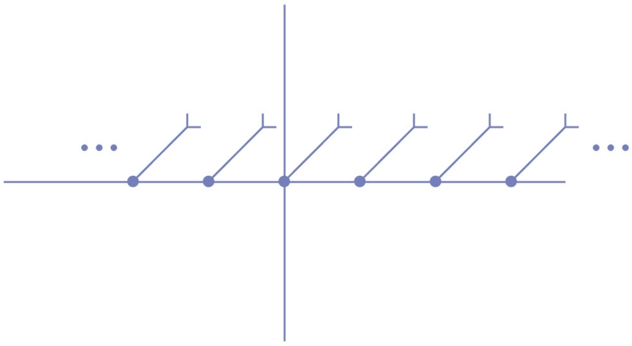
Conséquence

- Il suffit de connaître *f* sur un intervalle de longueur une période. On obtient toute la courbe en effectuant des translations successives de vecteurs $T\vec{i}$ *et* $-T\vec{i}$ de la courbe obtenue sur un intervalle de longueur une période.
- Si T est période, alors tout multiple de T est période.

- Parmi toutes les périodes, on privilégiera la plus petite des périodes positives. On parlera alors de LA période de la fonction *f*. Lorsque l'on dira « *f* de période *T* », il s'agit en fait de la plus petite des période positives.

Exemple

Traçons la courbe de la fonction *f* définie sur R, périodique de période 1, dont l'expression sur l'intervalle $[0;1[$ est $f(x) = x$



2.2 Fonction sinus et cosinus.

2.2.1 Définition et périodicité.

A tout réel *x*, correspond un point *M* du cercle trigonométrique tel que *x* est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$

A tout réel x, on peut donc associer les réels $\cos x$ *et* $\sin x$ coordonnées du point *M*, il est donc possible de définir les deux fonctions suivantes :

$$sin : \begin{cases} R \rightarrow [-1;1] \\ x \mapsto \sin x \end{cases} \qquad et \qquad cos : \begin{cases} R \rightarrow [-1;1] \\ x \mapsto \cos x \end{cases}$$

Théorème

Les fonctions cosinus et sinus sont des fonctions périodiques de période 2π.

Démonstration

En utilisant les premières propriétés mises en évidence dans ce cours, $cos(x+2k\pi)=cos\,x$ et $sin(x+2k\pi)=sin\,x$ avec $k=1$, on établit que 2π est période. De plus $cos(\pi+x)=-cos\,x$ et $sin(\pi+x)=-sin\,x$, prouve que π n'est pas période. Donc 2π est la plus petite période positive.

2.2.2 Propriété de parité.

Théorème

La fonction cosinus est une fonction paire car $\forall x \in R, \quad cos(-x)=cos(x)$.

La fonction sinus est une fonction impaire car $\forall x \in R, \quad sin(-x)=-sin(x)$.

Conséquence

En utilisant la propriété de périodicité, il suffit d'étudier les fonctions cosinus et sinus sur un intervalle de longueur 2π. Pour pouvoir utiliser les propriétés de parité, on centre celui-ci en 0. Finalement, il suffit d'étudier ces fonctions sur l'intervalle $[0,\pi]$; le reste du graphe de ces fonctions se déduisant par symétries (par rapport à l'axe des ordonnées pour la fonction cosinus et par rapport à l'origine pour la fonction sinus) et par translations successives de vecteurs $2\pi\vec{i}$ *et* $-2\pi\vec{i}$

2.2.3 Etude sur $[0,\pi]$.

Nous avons vu dans le chapitre sur la dérivation que les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur *R*, de plus si la fonction *u* est dérivable sur *I* alors les fonctions composées $x \mapsto sin(u(x))$ *et* $x \mapsto cos(u(x))$ sont dérivables sur *I*.

Théorème

La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$ et la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

Démonstration

Pour mettre en évidence ce théorème, il suffit de regarder sur le cercle, lorsque *M* parcourt le cercle, comment se comportent les projections *P* et *Q* de *M*.

Nous avons dans un chapitre précédent que :

$\forall x \in R, \qquad cos' x = -sin\, x \quad et \qquad sin' x = cos\, x$

La fonction sinus étant positive sur $[0, \pi]$, on en déduit que la fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$.

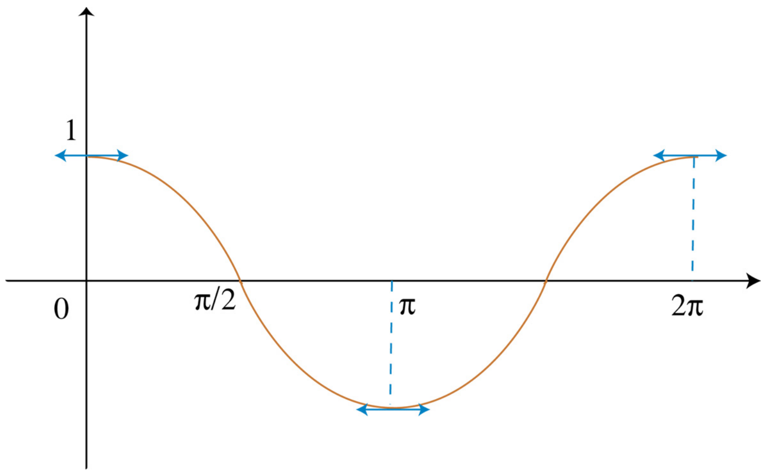
La fonction cosinus étant positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et négative sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, on en déduit que la fonction sinus est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur . $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Les dérivées ne s'annulant qu'en des points isolés, on peut même dire que monotonies sont strictes.

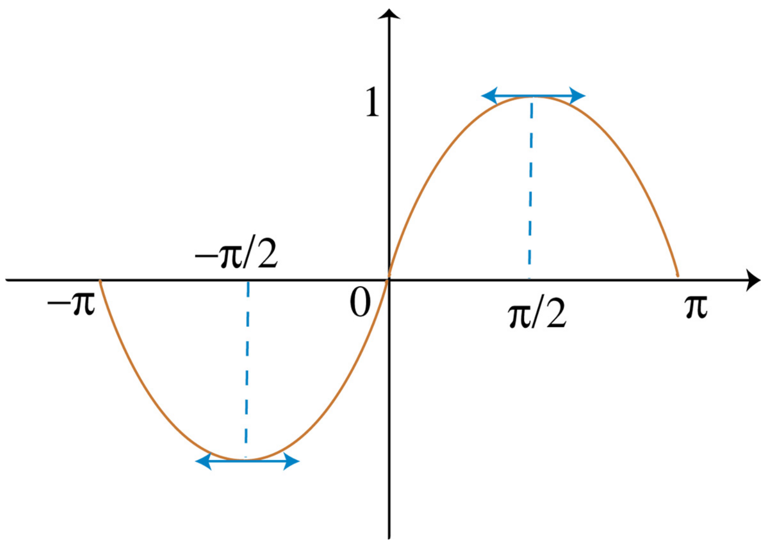
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$-\sin x$			-		
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		+	0	-	π
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Courbes représentatives.



La fonction cosinus



La fonction sinus

Propriétés

Les fonctions $x \mapsto sin(ax+b)$ *et* $x \mapsto cos(ax+b)$ sont périodiques de période $\dfrac{2\pi}{a}$.

En effet, par exemple pour le sinus :

$$sin\left(a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)+b\right)=sin(ax+2\pi+b)=sin(ax+b)$$

Exercice **(MATH05E02A)**

Soit la fonction *f* définie par : $f(x) = 3sin(2x-\dfrac{\pi}{4})$

1) Comparer $f(x)$ *et* $f(x+\pi)$; conclure.

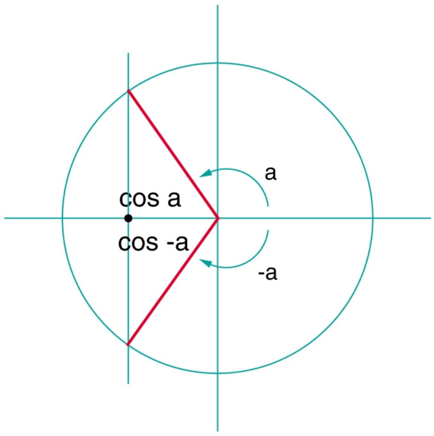
2) Calculer la dérivée de la fonction *f*.

3) Pour étudier le signe de la dérivée, on pose $X = 2x-\dfrac{\pi}{4}$; déterminer les valeurs de *x* pour $X = 0$, $X = \dfrac{\pi}{2}$, $X = \dfrac{3\pi}{2}$, $X = 2\pi$.

4) Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{8}\,;\,\dfrac{9\pi}{8}\right]$ et tracer la courbe représentative de *f* dans un repère

<u>*2.2.4 Equations trigonométriques*</u>

- $cos\,a = cos\,b$



$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} a = b + 2k\pi, \quad k \in Z \\ ou \\ a = -b + 2k'\pi, \quad k' \in Z \end{array} \right.$$

Exemple

Nous allons résoudre : $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Il faut se ramener au cas : $\cos a = \cos b$

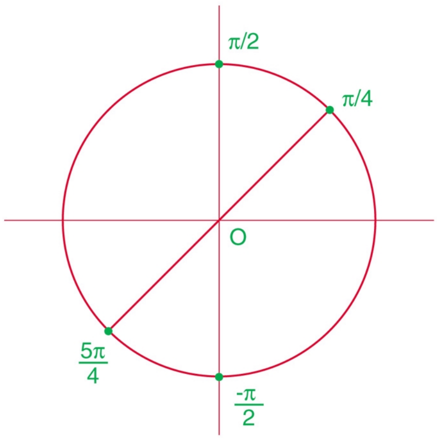
$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2k'\pi \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad , \quad k \in Z \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{2} + k'\pi \quad , \quad k' \in Z \end{array} \right.$$

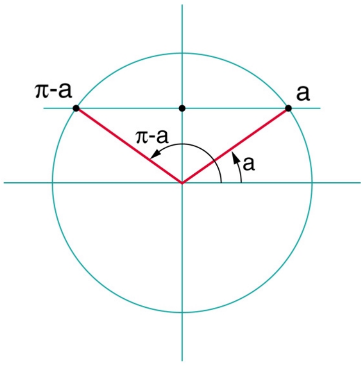
Remarque

Attention de ne pas oublier de diviser aussi $2k\pi$ et $2k'\pi$. Ce sont des erreurs courantes.

on dessine les solutions sur le cercle trigonométrique.



- $sin\,a = sin\,b$



$$sin\,a = sin\,b \Leftrightarrow \left| \begin{array}{lll} a = b + 2k\pi & , & k \in Z \\ ou & & \\ a = \pi - b + 2k'\pi & , & k' \in Z \end{array} \right.$$

Exemple

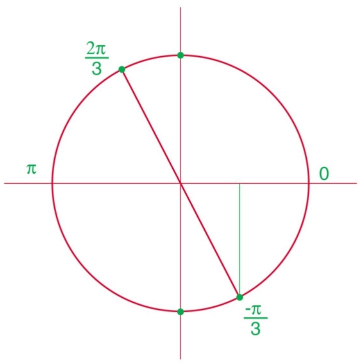
Soit à résoudre : $2\,sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

Il faut se ramener au cas : $sin\,a = sin\,b$

$$2\,sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) = sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ -2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k'\pi \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{lll} x = -k\pi & , & k \in Z \\ ou & & \\ x = -\frac{\pi}{6} - k'\pi & , & k' \in Z \end{array} \right.$$

Plaçons les points sur le cercle trigonométrique.



- $sin\,a = cos\,b$

On se ramène à un des deux cas précédents par la transformation suivante :

$$sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=cos\,x \quad ou \quad cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=sin\,x$$

Exemple

Résolvons : $sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=cos\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$

$$sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=cos\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right)=cos\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow cos\left(-x+\frac{2\pi}{3}\right)=cos\left(-2x+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}-x+\frac{2\pi}{3}=-2x+\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ ou\\ -x+\frac{2\pi}{3}=2x-\frac{\pi}{4}+2k'\pi\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left|\begin{array}{lll}x=-\frac{5\pi}{12}+2k\pi & , & k\in Z\\ ou & & \\ x=\frac{11\pi}{36}-\frac{2}{3}k'\pi & , & k'\in Z\end{array}\right.$$

2.3 La fonction tangente.

2.3.1 Définition.

Définition

Soit un réel x. Si $cos\,x\neq 0$, on appelle tangente de x le réel défini par : $tan\,x=\frac{sin\,x}{cos\,x}$

A tout réel x tel que $cos\,x\neq 0$, on peut donc associer le réel $tan\,x$, on définit ainsi la fonction tangente :

$$cos\,x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$$

$$tan:\left\{\begin{array}{lcl}\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[& \to & R\\ x & \mapsto & tan\,x\end{array}\right. \qquad k\in Z$$

2.3.2 Propriétés

Propriétés

- Cette fonction est périodique de période π.

  En effet, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \Rightarrow x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi,\ k' \in Z$ et

  $$tan(x+\pi) = \frac{sin(x+\pi)}{cos(x+\pi)} = \frac{-sin\,x}{-cos\,x} = tan\,x$$

- Cette application est impaire.

  En effet, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z \Rightarrow -x \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi,\ k' \in Z$ et

  $$tan(-x) = \frac{sin(-x)}{cos(-x)} = -\frac{sin\,x}{cos\,x} = tan\,x$$

- Il résulte des deux propriétés précédentes que sa courbe est obtenue à partir de sa représentation sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ en effectuant une symétrie par rapport à l'origine et des translations successives de vecteurs $\pi\vec{i}$ *et* $-\pi\vec{i}$.

- Nous avons vu dans le chapitre sur la dérivation que la fonction tangente est dérivable sur *R*, de plus si la fonction *u* est dérivable sur *I* alors la fonction composée $x \mapsto tan(u(x))$ sont dérivables sur *I*.

  $$tan'\,x = \frac{cos\,x\,cos\,x - sin\,x(-sin\,x)}{cos^2\,x} = \frac{cos^2\,x + sin^2\,x}{cos^2\,x} = \frac{1}{cos^2\,x} = 1 + tan^2\,x$$
  $$tan'(u(x)) = \left(1 + tan^2\,u(x)\right) \times u'(x)$$

  On retiendra cette formule très utile pour la suite du cours d'analyse:

  $$\boxed{\tan'x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x}$$

  La dérivée étant strictement positive, la fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

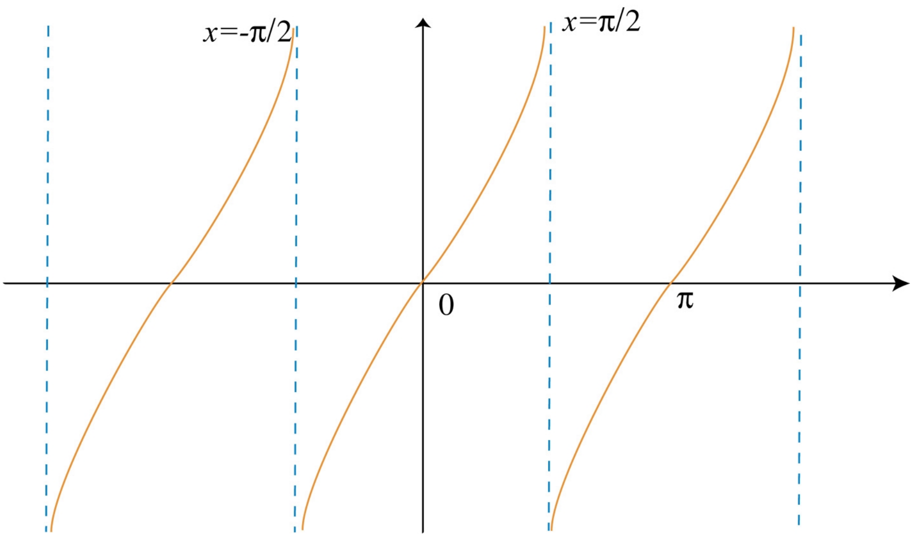
- $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} tan\,x = +\infty$

$$\text{En effet}\quad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \cos x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$$

La courbe admet donc des asymptotes verticales d'équations $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$.

Tableau de variation

x	$\frac{-\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$		$+$	
$\tan x$	$-\infty$	0	$+\infty$



Propriétés

La fonction $x \mapsto tan(ax+b)$ a pour période $\dfrac{\pi}{a}$

2.3.3 Equation $\tan a = \tan b$

$$\boxed{\tan a = \tan b \Leftrightarrow a = b + k\pi, \quad k \in Z}$$

Exemple

Résolvons: $3\tan x = \sqrt{3}$.

On se ramène à l'équation type $\tan a = \tan b$

$$3\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan x = \tan\frac{\pi}{6}$$

On applique le résultat du cours :

$$\tan x = \tan\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, \; k \in Z$$

Exercice (MATH05E03A)

Résoudre dans R et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

1) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 1$

2) $\sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 2$

3) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

4) $3\tan\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

Exercice (MATH05E01B)

Démontrer que pour tout réel t

1) $(\cos t + \sin t)^2 = 1 + 2\cos t \sin t$
2) $(\cos t - \sin t)^2 = 1 - 2\cos t \sin t$
3) $(\cos t + \sin t)^2 + (\cos t - \sin t)^2 = 2$
4) $(\cos t + \sin t)^2 - (\cos t - \sin t)^2 = 4\cos t \sin t$

Exercice (MATH05E01C)

Exprimer en fonction de $\sin t$ et $\cos t$:

1) $\sin(3\pi + t)$ 2) $\cos(5\pi + t)$ 3) $\sin(4\pi - t)$

4) $\cos(-\pi - t)$ 5) $\cos(4\pi + t)$ 6) $\sin(5\pi + t)$

7) $\sin(-\pi - t)$ 8) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)$ 9) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)$

Exercice (MATH05E03B)

Sachant que $cos\ t < 0$ *et* $tan\ t = -\frac{3}{8}$ calculer $cos\ t$ *et* $sin\ t$.

Exercice (MATH05E03C)

1) Sachant que $0 < t < \frac{\pi}{2}$ et que $\sin t = \frac{1}{4}$, calculer $\tan t$.

2) Sachant que $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ et que $\cos t = -\frac{1}{5}$, calculer $\tan t$.

3) On donne $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, calculer $\tan\frac{\pi}{12}$.

Solution **(MATH05E09)**

La fonction f définie sur R par $f(x) = arctan(2x) + arctan\, x$ est strictement croissante et continue comme somme de fonctions strictement croissantes et continues.

De plus $f(0) = 0$

Donc $\dfrac{\pi}{4}$ admet un antécédent unique positif.

On prend la tangente de chaque membre :

$$Arc\tan(2x) + Arc\tan x = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \tan\left(Arc\tan(2x) + Arc\tan x\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\left(Arc\tan(2x)\right) + \tan\left(Arc\tan x\right)}{1 - \tan\left(Arc\tan(2x)\right)\tan\left(Arc\tan x\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x + x}{1 - 2x^2} = 1$$

Soit $2x^2 + 3x - 1 = 0$ qui admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4} \; et \; x_2 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$$

Seule convient la solution positive donc $S = \left\{ \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4} \right\}$

Retour

Solution **(MATH05E10)**

$f(x) = Arcsin(2x+1)$

- Ensemble de définition : il faut et il suffit que $-1 \le 2x+1 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le x \le 0$
  Soit $D_f = [-1,0]$

- Etude aux bornes du domaine :
  $f(-1) = Arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ *et* $f(0) = Arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

- Variations : f est dérivable sur $]-1,0[$ et on a :
  $$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x+1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{-4x^2-4x}}$$

  Donc f est strictement croissante sur D_f .

  d'où le tableau de variations

x	-1		0
f'	‖	+	‖
f	$-\frac{\pi}{2}$	↗	$\frac{\pi}{2}$

- Concavité et point d'inflexion:

  f' est dérivable sur $]-1,0[$ et on a: $f''(x) = \frac{4(2x+1)}{\left(\sqrt{-4x^2-4x}\right)^3}$

  f'' s'annule en $x = -\frac{1}{2}$, en changeant de signe, donc il y a un point d'inflexion en $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

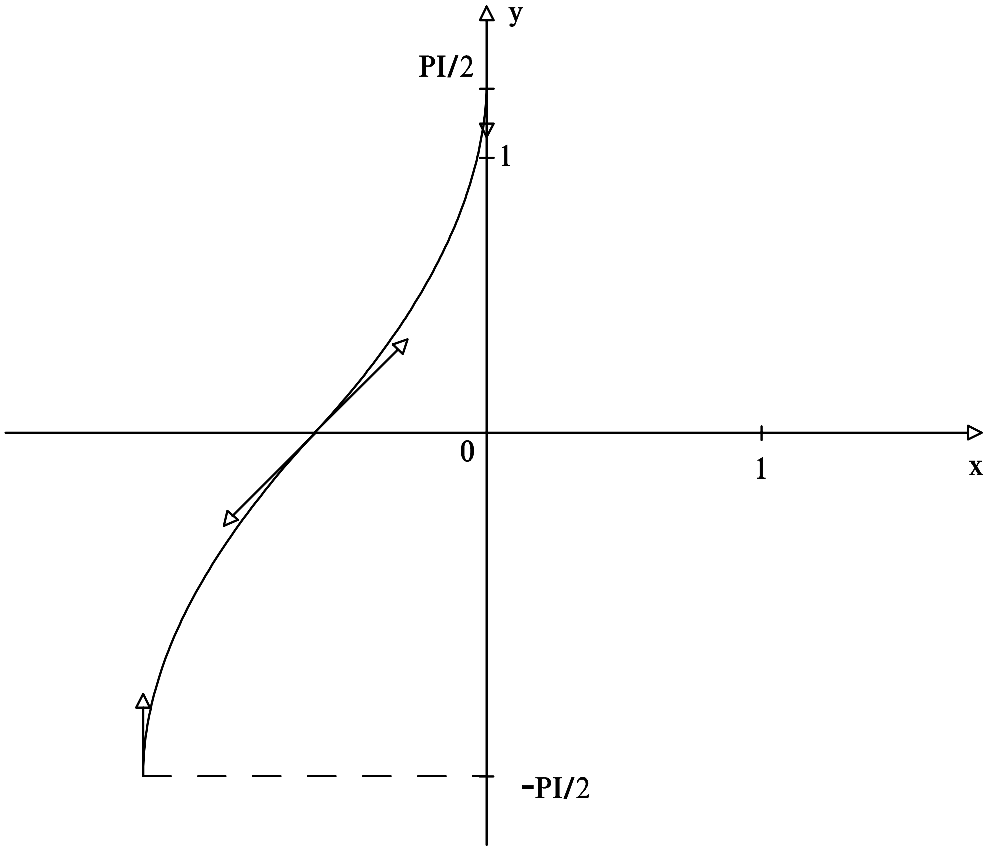
- Tangentes aux points particuliers:

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f'(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad$ demi-tangente verticale au point $\left(-1, -\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f'(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad$ demi-tangente verticale au point $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$f'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad$ Equation de la tangente au point d'inflexion: $y = 2x + 1$

- Représentation graphique :



Retour

Solution **(MATH05E11)**

Les points A, B et C sont sur le cercle de centre O et de rayon $OA = OB = OC$ donc OAC est isocèle de sommet O et d'angle $C = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$

L'angle $COA = \pi - 2\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ $\quad OH = OA\cos\frac{\pi}{4} = AH = OA\sin\frac{\pi}{4} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = 4a^2 - \left(CH^2 + AH^2\right) = 4a^2 - \left((a - AH)^2 + AH^2\right)$$

$$= 4a^2 - \left(\left(a - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}\right) = 4a^2 - \left(a^2 \cdot \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} + \frac{a^2}{2}\right)$$

$$= 4a^2 - 2a^2 + a^2\sqrt{2} = a^2(2 + \sqrt{2}) \qquad AB = a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

2) $$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{HB}{AB} = \frac{a + \frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{AH}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2+\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{4-2}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{2}-1$$

Retour

Solution **(MATH05E12)**

Déterminons l'ensemble de définition $D_g = \left\{ x \in R \,/\, -1 \le 3x - 4x^3 \le 1 \right\}$

On peut étudier la fonction auxiliaire $u\!: x \mapsto 3x - 4x^3$ sur l'intervalle $\left[-1,1\right]$.
u est dérivable et $u'(x) = 3 - 12x^2$.
On obtient le tableau de variations de la fonction u suivant :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
u'		$-$	0	$+$	0	$-$	
u	1		-1		1		-1

$-1 \le u(x) \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$ *et donc* $D_g = \left[-1,1\right]$

La fonction sinus est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $D_g = \left[-1,1\right]$

$g(x) = g(\sin\varphi) = Arc\sin\left(3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi\right) = Arc\sin(\sin(3\varphi))$

On retrouve l'exercice MATH05E05A avec $X = 3\varphi$

- $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow -2\pi + \pi - 3\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *et* $Arc\sin(\sin(3\varphi)) = -\pi - 3\varphi$

Pour $x \in \Big[-\quad --\quad g\ x \quad Arc \quad x$

Pour $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$, *alors* $g(x) = 3 Arc\sin x$

- $\varphi \in \left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ *alors* $\pi - 3\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *et* $Arc\sin(\sin(3\varphi)) = \pi - 3\varphi$

Pour $x \in \left]\frac{1}{2},1\right]$, *alors* $g(x) = \pi - 3 Arc\sin x$

On vérifie sur ces formules que g est continue sur $[-1,1]$

Retour

Solution (MATH05E13)

La fonction $x \mapsto Arc\tan x$ est croissante sur *R*.

$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \frac{1}{8} > 0$

Donc : $\frac{\pi}{4} = Arc\tan 1 > Arc\tan\frac{1}{3} > Arc\tan\frac{1}{5} > Arc\tan\frac{1}{7} > Arc\tan\frac{1}{8}$

Soit :

$0 < Arc\tan\frac{1}{3} + Arc\tan\frac{1}{5} + Arc\tan\frac{1}{7} + Arc\tan\frac{1}{8} < \pi$

Utilisons : $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

Calculons séparément

$$\tan\left(Arc\tan\frac{1}{3} + Arc\tan\frac{1}{5}\right) = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}} = \frac{4}{7}$$

$$\tan\left(Arc\tan\frac{1}{7} + Arc\tan\frac{1}{8}\right) = \frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}} = \frac{3}{11}$$

Puis de nouveau :

$$\tan w_1 = \frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}\times\frac{3}{11}} = 1$$

$$\begin{cases} w_1 \in \left]0,\pi\right[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\ \tan w_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad w_1 = Arc\tan 1 = \frac{\pi}{4}$$

En utilisant : $Arc\tan x + Arc\tan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ *avec* $x > 0$ pour les valeurs :

$x = 3,\ x = 5,\ x = 7$ *puis* $x = 8$

$w_1 + w_2 = 2\pi$

Comme $w_1 = \frac{\pi}{4}$ alors $w_2 = Arc\tan 2 + Arc\tan 3 + Arc\tan 7 + Arc\tan 8 = \frac{7\pi}{4}$

Retour

Solution (MATH05E14)

$\phi: \quad x \mapsto Arc\tan(2x) + Arc\tan(3x)$

La fonction ϕ est continue, strictement croissante sur R, donc bijective de $R \text{ sur } \left]-\pi ; \pi\right[$

$-\dfrac{\pi}{4}$ admet un antécédent et un seul sur R

L'équation $Arc\tan(2x) + Arc\tan(3x) = -\dfrac{\pi}{4}$ admet donc une solution et une seule

Calculons la tangente des deux membres.

Utilisons : $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$$\frac{\tan(Arc\tan(2x)) + \tan(Arc\tan(3x))}{1 - \tan(Arc\tan(2x))\tan(Arc\tan(3x))} = -1$$

$$\frac{5x}{1-6x^2} = -1 \quad \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 5x - 1 = 0 \\ x^2 \neq \dfrac{1}{6} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ x = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Comme nous avons raisonné par implication, vérifions si ces solutions sont bonnes.

Pour $x = 1$, $Arc\tan 2 + Arc\tan 3 > 0$, donc 1 n'est pas solution

L'équation possédant une solution et une seule, nécessairement il s'agit de $x = -\dfrac{1}{6}$

On obtient alors l'égalité :

$$Arc\tan\left(-\frac{1}{3}\right) + Arc\tan\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(Arc\tan\left(\frac{1}{3}\right) + Arc\tan\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Retour

Solution (MATH05E15)

Démontrons que $\forall x \in \left]-1,1\right[, \qquad Arc\sin x = Arc\tan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$Arc\sin 0 = Arc\tan \dfrac{0}{\sqrt{1-0}} = 0$

Les fonctions $x \mapsto Arc\sin x \text{ et } x \mapsto Arc\tan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ sont dérivables sur $\left]-1;1\right[$ et

$Arc\sin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$Arc\tan'\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\dfrac{\sqrt{1-x^2} - \dfrac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} = \frac{\dfrac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Les dérivées sont donc égales ce qui prouve que les fonctions sont égales car elles coïncident pour $x = 0$.

Retour

Solution (MATH05E16)

Démontrons : $Arc\cos x = \begin{cases} Arc\tan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) & pour \quad x \in \left]0{,}1\right] \\ Arc\tan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) + \pi & pour \quad x \in \left[-1{,}0\right[\end{cases}$

- Pour $x \in \left]\,0{,}1\,\right]$ posons : $y = Arc\cos x \;\; avec \;\; y \in \left[\,0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

  alors $\cos y = x \;\; et \;\; \sin y = \sqrt{1-x^2} \;\; donc \;\; \tan y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

  Et donc : $y = Arc\cos x = Arc\tan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \quad pour \quad x \in \left]\,0{,}1\,\right]$

- Pour $x \in \left[-1{,}0\right[$ on utilise $Arc\cos x + Arc\cos(-1) = \pi$ et l'imparité de la fonction Arctangente. On obtient alors :

  $Arc\cos x = \pi - Arc\cos(-x) = \pi - Arc\tan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{-x}\right) = \pi + Arc\tan\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

Retour

Aide (MATH05E01A)

On rappelle que $\forall t \in R, \quad sin^2 t + cos^2 t = 1$

$\forall t \in R, \quad |sin\,t| = \sqrt{1 - cos^2 t}$

$\forall t \in R, \quad |cos\,t| = \sqrt{1 - sin^2 t}$

Vous vérifierez avec soin le signe $sin\,t$ ou de $cos\,t$ avant de conclure.

Retour

Aide (MATH05E01B)

Ces démonstrations reposent sur la formule : $\forall t \in R, \quad cos^2 t + sin^2 t = 1$

Retour

Aide (MATH05E01C)

Vous pourrez utiliser la périodicité des fonctions sinus et cosinus et les propriétés de symétrie. Il souhaitable de faire un dessin.

Retour

Aide **(MATH05E02A)**

Vous devez trouver : $\forall x \in R, \quad f'(x) = 6\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

Avec les propriétés mises en évidence, l'intervalle d'étude le plus simple est $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]$

Retour

Aide (MATH05E03A)

Il suffit d'appliquer les résultats du cours. Vous ferez bien attention de diviser également $2k\pi$ lorsque vous cherchez *x*.

Exemple : $3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$

Retour

Aide (MATH05E03B)

On rappelle que $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ *et* $1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$

Retour

Aide (MATH05E03C)

Cet exercice prolonge l'exercice MATH05E01A

On rappelle que $sin^2 t + cos^2 t = 1 \quad et \quad 1 + tan^2 t = \dfrac{1}{cos^2 t}$

Retour

Solution (MATH05E01A)

On rappelle que $sin^2 t + cos^2 t = 1$

- $cos^2 t = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

  Or $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *donc* $cos\ t > 0$ *et* $cos\ t = \frac{\sqrt{15}}{4}$

- $sin^2 t = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$

  Or $t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ *donc* $sin\ t > 0$ *et* $sin\ t = \frac{\sqrt{24}}{5}$

- $cos \frac{\pi}{12} > 0 \Rightarrow cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{1 - sin^2 \frac{\pi}{12}}$

  $cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{12}}$

  Or $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 6 + 2 + 2\sqrt{12}$

  Donc $cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH05E01B)

- $(cos\ t + sin\ t)^2 = cos^2 t + sin^2 t + 2\,sin\ t\,cos\ t$

  Or $\forall t \in R, \quad cos^2 t + sin^2 t = 1$

  Donc $(cos\ t + sin\ t)^2 = 1 + 2\,sin\ t\ cos\ t$

- $(cos\ t - sin\ t)^2 = cos^2 t + sin^2 t - 2\,sin\ t\,cos\ t$

  Or $\forall t \in R, \quad cos^2 t + sin^2 t = 1$

  Donc $(cos\ t - sin\ t)^2 = 1 - 2\,sin\ t\ cos\ t$

- On peut additionner membre à membre les deux égalités précédentes :

  $(cos\ t + sin\ t)^2 + (cos\ t - sin\ t)^2 = 1 + 2\,sin\ t\ cos\ t + 1 - 2\,sin\ t\ cos t$

  Donc $(cos\ t + sin\ t)^2 + (cos\ t - sin\ t)^2 = 2$

- On peut soustraire membre à membre les mêmes égalités :

  $(cos\ t + sin\ t)^2 - (cos\ t - sin\ t)^2 = 1 + 2\,sin\ t\ cos\ t - 1 + 2\,sin\ t\ cos t$

  Donc $(cos\ t + sin\ t)^2 + (cos\ t - sin\ t)^2 = 4\,sin\ t\ cos\ t$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH05E01C

On utilise les formules du cours, ou plus simplement, on fait un dessin.

1) $-\sin t$ 2) $-\cos t$ 3) $-\sin t$

4) $-\cos t$ 5) $\cos t$ 6) $-\sin t$

7) $\sin t$ 8) $-\sin t$ 9) $-\cos t$

Il est conseillé d'essayer le résultat obtenu avec des valeurs de t simples.

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH05E02A)

1) $\forall x \in R,\ x+\pi$ *et* $f(x) = f(x+\pi)$. La fonction est donc périodique de période π ; elle n'est ni paire, ni impaire, on va l'étudier sur un intervalle de longueur π.

2) La fonction est dérivable sur R et $\forall x \in R,\ f'(x) = 6cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

3) $X = 2x - \frac{\pi}{4}$ équivaut à $x = \frac{1}{2}\left(X + \frac{\pi}{4}\right)$. Les valeurs demandées sont données dans le tableau suivant, ce qui nous permet de donner un intervalle d'étude de longueur π, de la fonction $f\left[\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right]$ qui se révèle pratique pour l'étude.

4) $f'(x)$ est du signe de $cos\,X$

x	$\frac{\pi}{8}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{7\pi}{8}$		$\frac{9\pi}{8}$
X	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	3	↘	−3	↗	0

Remarques :

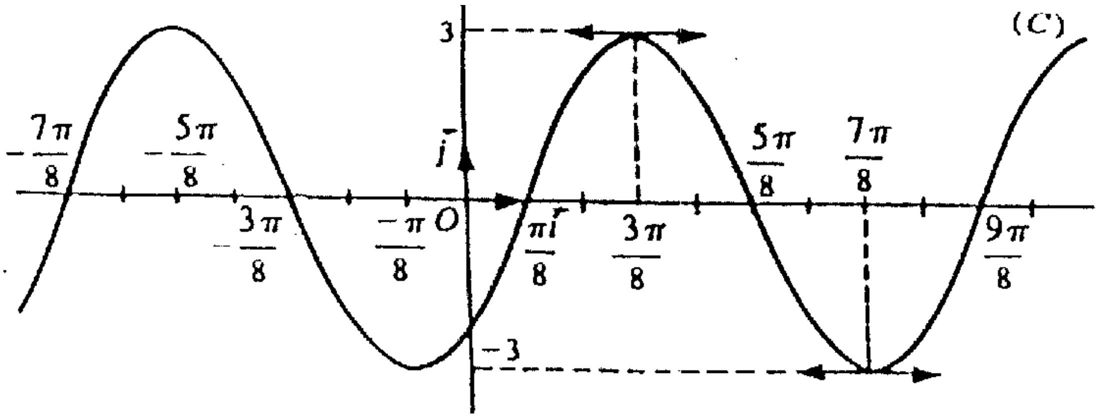
La longueur de l'intervalle d'étude est $\frac{9\pi}{8} - \frac{\pi}{8} = \pi$ ce qui correspond à une période.

L'énoncé donne ici tous les intermédiaires. Les valeurs $X = \frac{\pi}{2}$ et $X = \frac{3\pi}{2}$ étaient les valeurs qui annulaient la dérivée.

Le procédé utilisé ici est général ; les fonctions $x \mapsto sin(ax+b)$ et $x \mapsto cos(ax+b)$ avec a réel non nul, peuvent s'étudier en posant $\mathrm{X} = ax+b$.

Pour tracer la courbe, il est commode de prendre un repère orthogonal non orthonormal, car les valeurs qui interviennent sont des « multiples » de $\frac{\pi}{8}$.

On dessine la courbe sur un intervalle de largeur égale à une période et on complète à l'aide de translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$.



Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour

Solution (MATH05E03A)

Dans tout l'exercice, k et k' sont des entiers relatifs.

- $cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\frac{1}{2}$

$$cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4}-2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ou \quad \frac{\pi}{4}-2x=-\frac{\pi}{3}+2k'\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}-2k\pi \quad ou \quad 2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}-2k'\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad x=-\frac{\pi}{24}-k\pi \quad ou \quad x=\frac{7\pi}{24}-k'\pi$$

- Il s'agit ici d'un grossier piège :

$$sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2} \qquad S=\varnothing \qquad (car\ \sqrt{2}>1)$$

- $sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

Or $sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=-cos(3x)=cos(3x+\pi)$

Donc

$$cos(3x+\pi)=cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3x+\pi=2x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ 3x+\pi=-2x+\frac{\pi}{3}+2k'\pi \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x=-\frac{4\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=-\frac{2\pi}{15}+\frac{2k'\pi}{5} \end{array} \right.$$

- $tan\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad 3x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}+k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{2\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution (MATH05E03B)

On rappelle que $sin^2 t + cos^2 t = 1 \quad et \quad 1 + tan^2 t = \dfrac{1}{cos^2 t}$

$tan\ t = -\dfrac{3}{8}, \qquad donc\ cos^2 t = \dfrac{64}{73}$

Or $cos\ t < 0$

$cos\ t = -\dfrac{8}{\sqrt{73}} \quad et \quad sin\ t = tan\, t \times cos\, t = -\dfrac{8}{\sqrt{73}} \times \left(-\dfrac{3}{8}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{73}}$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de faire l'exercice ci-dessous.

Exercice

Retour

Solution **(MATH05E03C)**

Cet exercice prolonge l'exercice MATH05E01A

On rappelle que $sin^2 t + cos^2 t = 1 \quad et \quad 1 + tan^2 t = \frac{1}{cos^2 t}$

- $cos^2 t = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

  Or $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad donc \quad cos\ t > 0 \ \ et \ \ cos\ t = \frac{\sqrt{15}}{4}$

  $$tan\,t = \frac{sin\,t}{cos\,t} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{15}}$$

- $sin^2 t = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$

  Or $t \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\quad donc \ \ sin\ t > 0 \ \ et \ \ sin\ t = \frac{\sqrt{24}}{5}$

  $$tan\,t = \frac{sin\,t}{cos\,t} = \frac{\frac{\sqrt{24}}{5}}{-\frac{1}{5}} - \sqrt{24}$$

- $cos\frac{\pi}{12} > 0 \Rightarrow cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{1 - sin^2\frac{\pi}{12}}$

  $$cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{12}}$$

  Or $(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 = 6 + 2 + 2\sqrt{12}$

  Donc $cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad et \quad tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$

Si vous avez éprouvé des difficultés pour résoudre cet exercice, nous vous conseillons vivement de consulter votre tuteur.

Retour