HEI – cycle préparatoire à la formation d'ingénieur FC

Sommaire du support de cours de mécanique

A. Talha

Chapitre 1 :

RAPPELS MATHEMATIQUES

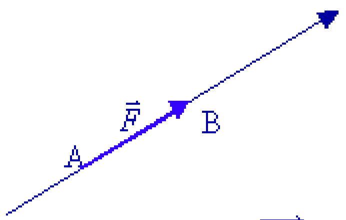
I - LES UNITÉS

Grandeur	Unités S.I	Autres unités
Longueur	m	1 A = 10^{-10} m ; 1 µm = 10^{-6} m
Surface	m^2	1 are = 100 m^2
Volume	m^3	1 l = 10^{-3} m^3
Angle	rd	d° = 0,0174 rd ; gr = 0,0157 rd
Masse	kg	
Temps	s	
Vitesse	m/s	
Force	N	
Energie	J	1 cal = 4,185 J
Puissance	W	
Température		T ° K = 273,15 + t ° C
Pression		1 bar = 10^5 Pa ; 1 atm = 9,8 10^4 Pa ; 1mm Hg = ?

II- LES VECTEURS : rappels et définitions

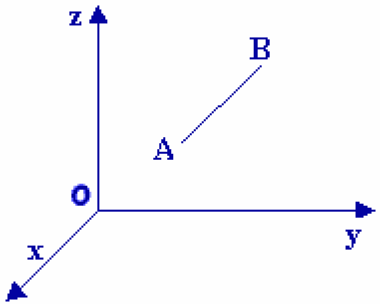
1 - Définition : un vecteur est une portion de droite limitée par deux points A et B. Dans le cas d'une force, il se caractérise par :

- son origine qui est son point d'application.
- son intensité qui est son module.
- le support qui est la droite.
- le sens.



Noté $\overrightarrow{AB}$ ou $(A, \overrightarrow{AB}) = (A, \vec{F})$.

2 - Projection et coordonnées :

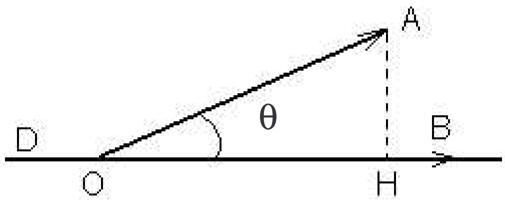


On projette $\overrightarrow{AB}$ sur les trois axes, on aura :

- les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ $\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{vmatrix}$ et de $\overrightarrow{OB}$ $\begin{vmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{vmatrix}$

les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont : $\begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix}$ si A = O on a x, y z

Projection d'un vecteur sur une droite :



La projection d'un vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur une droite D est égale à OH=$\left\|\overrightarrow{OA}\right\|.\cos\theta$ (θ étant l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{OA}$ et la droite (D)).

3- Produit scalaire de deux vecteurs :

Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ de même origine et faisant entre eux un angle θ.
Le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ est défini par :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\|.\left\|\overrightarrow{OB}\right\|.\cos\theta,\ (0 \leq \theta \leq \pi)$$

Les propriétés :

- Le produit scalaire est commutatif : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$
- Le produit scalaire n'est pas associatif : $(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OC}$ n'existe pas
- Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition vectorielle

$$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$$

- Dans un repère orthonormé de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a :

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$$

Considérons deux vecteurs :

$$\overrightarrow{OA} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

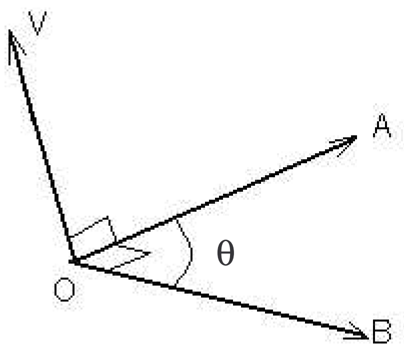
Le module d'un vecteur est défini par :

$$\left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA}} = \sqrt{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

Remarque :

- Si $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$ .avec $\overrightarrow{OA} \neq 0$ et $\overrightarrow{OB} \neq 0$ alors $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont perpendiculaires.

4- Produit vectoriel de deux vecteurs :



Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ de même origine et faisant entre eux un angle θ.
Le produit vectoriel des deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ est le vecteur défini par :
$\vec{V} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ de module $\left\|\overrightarrow{OA}\right\|.\left\|\overrightarrow{OB}\right\|.\sin\theta \ \ (0 \le \theta \le \pi)$.

Le vecteur $\vec{V}$ est perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
Le système ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\vec{V}$) forme un trièdre direct.

Les propriétés :

- Le produit vectoriel est anticommutatif :

$$\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OA} = - \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$$

- Le produit vectoriel n'est pas associatif :

$$(\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) \wedge \overrightarrow{OC} \neq \overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB}) \wedge \overrightarrow{OC})$$

- Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition vectorielle :

$$\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$$

- Dans un repère orthonormé de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a :

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \; \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \; \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

Considérons deux vecteurs :

$$\overrightarrow{OA} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$$

Et $\overrightarrow{OB} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1) \vec{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1) \vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{k}$$

Remarques :

- Le module de V = surface du parallélogramme formé par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
- Si $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{0}$ avec $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ alors $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont parallèles ou colinéaires.

5- Produit mixte de trois vecteurs :

Le produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ est le scalaire définit par :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= (y_2 z_3 - y_3 z_2) x_1 + (z_2 x_3 - z_3 x_2) y_1 + (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_1$$

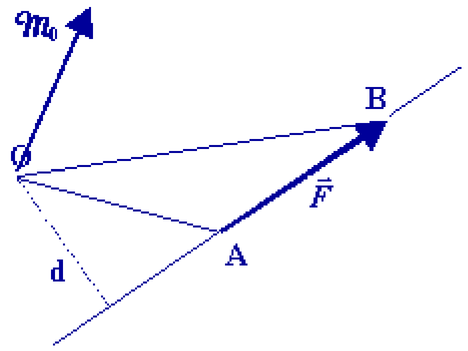
Remarque :

Le produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ est égal au volume du parallélépipède formé par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

On a : $\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB})$

LES MOMENTS

1 - Le moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace :



Le moment d'un vecteur par rapport à un point de l'espace est le vecteur libre défini par:

$$\mathcal{M}_O\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \mathcal{M}_O\,(A\,,\,\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$$

Le module du moment $\|\mathbf{M}_O\|$ = 2 aire du triangle OAB

A - Le moment d'un vecteur par rapport à un autre point O' de l'espace :

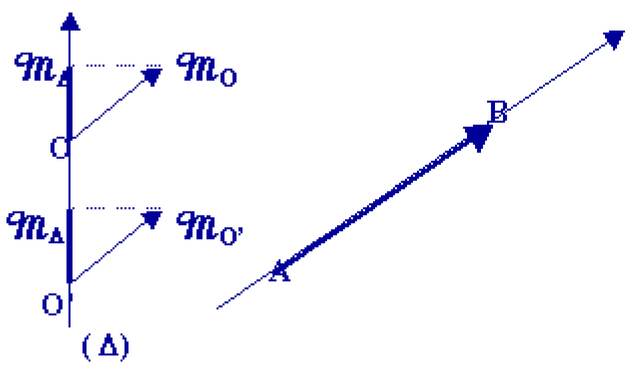
$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{O'}\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}\\ &= (\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OA}) \wedge \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}\\ &= \overrightarrow{OO'} \wedge \overrightarrow{AB} + \mathcal{M}_O\ \overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

B - Théorème de VARIGNON :

Le moment de la somme de plusieurs vecteurs concourants ou parallèles est égal à la somme des moments par rapport à O.

$$\mathcal{M} \sum = \sum \mathcal{M}$$

2- Le moment d'un vecteur par rapport à un axe Δ :



Définition 1 : Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est égal à la projection du moment de ce vecteur par rapport à un point quelconque de l'axe.

Définition 2 : Le moment d'un vecteur $(A, \vec{AB})$ par rapport à un axe **Δ** ayant pour origine O et pour vecteur unitaire i est égal au produit mixte $(\vec{i}, \vec{OA}, \vec{AB})$. Il s'écrit aussi

$$\mathcal{M}_{\Delta}\, \vec{AB} = \mathcal{M}_{O}\, \vec{AB} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot (\vec{OA} \wedge \vec{AB})$$

Remarques :

Le point O peut être un point quelconque appartenant à l'axe D.

Le moment est nul si O se trouve sur $\vec{AB}$, ou bien si **Δ** et (D) sont concourantes ou parallèles.

Remarque importante :

Le moment d'un vecteur par rapport à un point est un vecteur alors que son moment par rapport à un axe est scalaire.

FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES et INTÉGRALES
« en coordonnées cartésiennes »

1 - FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES :

On introduit l'opérateur vectoriel différentiel appelé nabla défini par :

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

a- GRADIENT :

Le gradient de la fonction scalaire $V(x, y, z)$ est le vecteur noté $\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \vec{\nabla}.V$ dont les composantes en coordonnées cartésiennes sont :

$$\overrightarrow{grad}\ V = \vec{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\text{ou} \quad \vec{\nabla} \times V = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}) \times V$$

b- DIVERGENCE :

La divergence d'un vecteur $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ est par définition, la quantité scalaire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})$$

$$\text{div}\ \vec{F} = \frac{\partial Fx}{\partial x} + \frac{\partial Fy}{\partial y} + \frac{\partial Fz}{\partial z}$$

c- ROTATIONNEL :

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ est le vecteur $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{F}$ définit par :

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

$$= (\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}) \wedge (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial Fz}{\partial y} - \frac{\partial Fy}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial Fx}{\partial z} - \frac{\partial Fz}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial Fy}{\partial x} - \frac{\partial Fx}{\partial y})\vec{k}$$

d- LAPLACIEN :

Le Laplacien d'une fonction scalaire $V(x, y, z)$ est la quantité scalaire :

$$\Delta V = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}V) = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}\,V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

2- FONCTIONS INTÉGRALES :

a- Circulation d'un vecteur :

La Circulation d'un vecteur $\vec{F}$ le long d'une courbe (s) limitée par M et M' est définie par :

$$\mathcal{C} = \int_M^{M'} \vec{F}.\vec{ds} = \int F \cdot ds \cos\theta$$

$\overrightarrow{ds}$ est le vecteur de déplacement élémentaire

b- flux d'un vecteur :

Le flux d'un vecteur à travers une surface est défini par : $\phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS}$